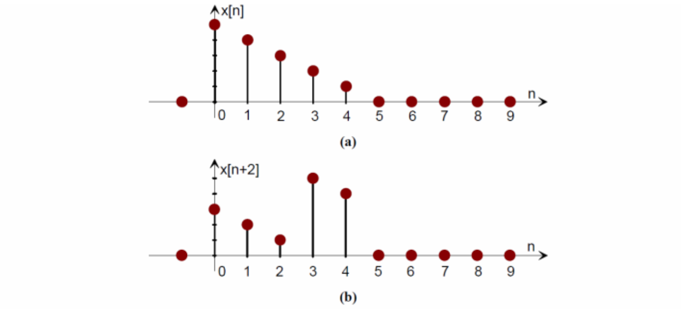
Digitalna obrada signala
Cirkularna konvolucija

Cirkularni pomeraj



Slika 4.3 Cirkularni pomeraj sekvence: (a) originalna sekvenca, (b) cirkularno pomerena sekvenca za dva odbirka u levo.

Cirkularno pomerena sekvenca ima za transformacioni par:

$$x[n+m] \xleftrightarrow{DFT} W_N^{-mk} X[k]$$

Digitalna obrada signala
Cirkularna konvolucija

DFT
$$X[k] = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

IDFT
$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Zbog toga što je funkcija W_N^p periodična po p sa periodom N, lako je utvrditi da se za bilo koji pomeraj $m \geq N$ ima isti transformacioni par kao i za kraći pomeraj m_1, gde je $m = m_1 + m_2 N$, $0 \leq m_1 \leq N-1$, odnosno $m_1 = m \bmod N = \langle m \rangle_N$. U stvari, m_1 *predstavlja ostatak kada se m podeli sa N.*

$$W_N^{mn} x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k+m]$$

Digitalna obrada signala
Cirkularna konvolucija

Da bi objasnili pojam cirkularne konvolucije posmatrajmo dve konačne sekvence dužine N, $x[n]$ i $h[n]$, čije su DFT $X[k]$ i $H[k]$, respektivno. Ako se $X[k]$ i $H[k]$ pomnože član po član, kao rezultat se dobija nova DFT sekvenca, $Y[k]$, sa istim brojem članova N. Dakle, ima se:

$$Y[k] = X[k]H[k], \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

Inverzna DFT sekvence $Y[k]$ je:

$$y[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y[k]e^{j2\pi km/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]H[k]e^{j2\pi km/N}$$

$$y[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}\right]\left[\sum_{l=0}^{N-1} h[l]e^{-j2\pi kl/N}\right]e^{j2\pi km/N} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sum_{l=0}^{N-1} h[l]\left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N}\right]$$

Digitalna obrada signala
Cirkularna konvolucija

???? $\left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N}\right]$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & a = 1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1 \end{cases}} \qquad a = e^{j2\pi(m-n-l)/N}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & l = m-n+pN = (m-n)\,\mathrm{mod}\,N,\ p \text{ ceo broj} \\ 0, & \text{drugde} \end{cases}$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} h[l]\left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N}\right]$$

$$\boxed{y[m] = x[m]\otimes h[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]h\langle m-n\rangle_N = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]x\langle m-n\rangle_N, \quad m = 0,1,\dots,N-1}$$